

Ταυτότητες



Βρέντζου Τίνα – Φυσικός –
Μεταπτυχιακός τίτλος: «Σπουδές
στην εκπαίδευση» ΜΕΔ

Ταυτότητες

Ενότητα 3^η

Ταυτότητες

Σκοπός

Ο σκοπός της 3^{ης} ενότητας είναι να γνωρίσουν οι μαθητές πότε μια ισότητα λέγεται ταυτότητα, ποιές είναι οι βασικές ταυτότητες, πώς αποδεικνύονται και πώς χρησιμοποιούνται .

Προσδοκώμενα

αποτελέσματα

Όταν θα έχετε μελετήσει την ενότητα αυτή , θα μπορείτε να:

- Διατυπώνετε λεκτικά τις βασικές ταυτότητες
- Τις αποδεικνύετε
- Τις χρησιμοποιείτε

Λέξεις κλειδιά

Ταυτότητα, απόδειξη, ανάπτυγμα, γινόμενο

Ταυτότητες

Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

$$(α+β)^2 = α^2 + 2αβ + β^2$$

$$(α-β)^2 = α^2 - 2αβ + β^2$$

$$α^2 - β^2 = (α+β)(α-β)$$

$$α^{2ν} - β^{2ν} = (α^ν + β^ν)(α^ν - β^ν)$$

$$(α+β)^3 = α^3 + 3α^2β + 3αβ^2 + β^3 = α^3 + β^3 + 3αβ(α+β)$$

$$(α-β)^3 = α^3 - 3α^2β + 3αβ^2 - β^3 = α^3 - β^3 - 3αβ(α-β)$$

$$α^3 + β^3 = (α + β)^3 - 3αβ(α+β) = (α+β)(α^2 - αβ + β^2)$$

$$α^3 - β^3 = (α - β)^3 + 3αβ(α - β) = (α-β)(α^2 + αβ + β^2)$$

$$(α+β+γ)^2 = α^2 + β^2 + γ^2 + 2αβ + 2βγ + 2γα$$

$$(x+α)(x+β) = x^2 + (α+β)x + αβ$$

$$(x+α)(x+β)(x+γ) = x^3 + (α+β+γ)x^2 + (αβ+βγ+γα)x + αβγ$$

Μερικές χρήσιμες παρατηρήσεις για τον σχηματισμό του αναπτύγματος $(α+β)^ν$:

1. Είναι ένα πλήρες ομογενές πολυώνυμο ν βαθμού, που είναι διατεταγμένο κατά τις κατιούσες δυνάμεις του α και τις ανιούσες δυνάμεις του β.
2. Οι δυνάμεις του α ξεκινούν από το ν και ελαττώνονται κατά ένα μέχρι να γίνουν 0, ενώ οι δυνάμεις του β ξεκινούν από το 0 και αυξάνουν κατά ένα μέχρι να γίνουν ν.
3. Σε κάθε όρο το άθροισμα των εκθετών του α και του β είναι σταθερό και ίσο με ν.
4. Το πλήθος των όρων του αναπτύγματος είναι ίσο με ν+1.
5. Οι όροι του αναπτύγματος που ισαπέχουν από τα άκρα έχουν ίσους συντελεστές.
6. Αν ο ν είναι άρτιος αριθμός, τότε το πλήθος των όρων του αναπτύγματος είναι περιττός αριθμός και υπάρχει ένας μόνο μεσαίος όρος που έχει τον μεγαλύτερο συντελεστή και οι εκθέτες των α και β είναι ίσοι.

7. Αν ο n είναι περιττός αριθμός, τότε το πλήθος των όρων του αναπτύγματος είναι άρτιος αριθμός και υπάρχουν δύο μεσαίοι όροι που έχουν τον ίδιο συντελεστή, που είναι και ο μεγαλύτερος του αναπτύγματος.

8. Στο ανάπτυγμα $(\alpha+\beta)^n$ όλοι οι όροι έχουν θετικό πρόσημο, ενώ στο ανάπτυγμα $(\alpha-\beta)^n$ το πρόσημο των όρων είναι εναλλάξ θετικό και αρνητικό.

9. Κάθε συντελεστής προκύπτει αν λάβουμε το γινόμενο του συντελεστή επί τον εκθέτη του προηγούμενου όρου και διαιρέσουμε με τον αριθμό που δηλώνει την τάξη του προηγούμενου όρου.

Χαρακτηριστικά παραδείγματα :

$$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

$$(\alpha+\beta)^4 = \alpha^4 + 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + \beta^4$$

$$(\alpha-\beta)^4 = \alpha^4 - 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta^3 + \beta^4$$

$$(\alpha+\beta)^5 = \alpha^5 + 5\alpha^4\beta + 10\alpha^3\beta^2 + 10\alpha^2\beta^3 + 5\alpha\beta^4 + \beta^5$$

$$(\alpha-\beta)^5 = \alpha^5 - 5\alpha^4\beta + 10\alpha^3\beta^2 - 10\alpha^2\beta^3 + 5\alpha\beta^4 - \beta^5$$

$$(\alpha+\beta)^6 = \alpha^6 + 6\alpha^5\beta + 15\alpha^4\beta^2 + 20\alpha^3\beta^3 + 15\alpha^2\beta^4 + 6\alpha\beta^5 + \beta^6$$

$$(\alpha-\beta)^6 = \alpha^6 - 6\alpha^5\beta + 15\alpha^4\beta^2 - 20\alpha^3\beta^3 + 15\alpha^2\beta^4 - 6\alpha\beta^5 + \beta^6$$

Πράξεις στις Αλγεβρικές παραστάσεις

Στις αλγεβρικές παραστάσεις προηγούνται οι πράξεις με τις ταυτότητες και μετά ακολουθούν οι πράξεις πολλαπλασιασμός και διαίρεση μεταξύ των μονωνύμων και τελικά η αναγωγή ομοίων όρων .

Παραδείγματα

α)

$$\begin{aligned}
 & 3x(x+3)^2 - (x+2)(x-2) - (x-3)^3 = \\
 & = 3x(x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2) - (x^2 - 2^2) - (x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 3 + 3 \cdot x \cdot 3^2 - 3^3) \\
 & = 3x(x^2 + 6x + 9) - (x^2 - 4) - (x^3 - 9x^2 + 27x - 27) \\
 & = 3x^3 + 18x^2 + 27x - x^2 + 4 - x^3 + 9x^2 - 27x + 27 \\
 & = 2x^3 + 26x^2 + 31
 \end{aligned}$$

β) $(x-1)^3 - 3(2x+1)^2 - (x-1)(x+2) =$

$$\begin{aligned}
 & = x^3 - 3x^2 + 3x - 1^3 - 3(4x^2 + 4x + 1^2) - (x^2 + 2x - x - 2) \\
 & = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 12x^2 - 12x - 3 - x^2 - 2x + x + 2 \\
 & = x^3 - 16x^2 - 10x - 2
 \end{aligned}$$

γ) $3 - (x-2)^2 + \underline{(x-1)^2 - (x+2)^2} =$

$$\begin{aligned}
 & = 3 - (x^2 - 4x + 4) + [(x-1) + (x+2)] \cdot [(x-1) - (x+2)] \\
 & = 3 - x^2 + 4x - 4 + (2x+1)(-3) \\
 & = 3 - x^2 + 4x - 4 - 6x - 3 \\
 & = -x^2 - 2x - 4
 \end{aligned}$$